49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

E Mërkurë, 16 Korrik, 2008

Problem 1. Le të jetë H pikëprerja e lartësive të trekëndëshit këndngushtë ABC. Rrethi me qendër mesin e brinjës BC, i cili kalon nga pika H, pret drejtëzën BC në pikat A_1 dhe A_2. Ngjashëm, rrethi me qendër mesin e brinjës CA, i cili kalon nga pika H, pret drejtëzën CA në pikat B_1 dhe B_2 dhe rrethi me qendër mesin e brinjës AB, i cili kalon nga pika H, pret drejtëzën AB në pikat C_1 dhe C_2. Tregoni që A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ndodhen mbi një rreth.

Problem 2. (a) Provoni mosbarazimin

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

për të gjithë numrat realë x, y, z, të ndryshëm nga 1 dhe që plotësojnë kushtin $xyz = 1$.

(b) Tregoni që ka një pafundësi treshesh numrash racionalë x, y, z, të ndryshëm nga 1 dhe që plotësojnë kushtin $xyz = 1$, për të cilët mosbarazimi i mësipërm kthehet në barazim.

Problem 3. Provoni që ekziton një pafundësi numrash të plotë pozitivë n të tillë që $n^2 + 1$ ka një pjesëtues të thjeshtë i cili është më i madh se $2n+\sqrt{2n}$.

Language: Albanian

Kohëzgjatja: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet 7 pikë

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

E Enjte, 17 Korrik, 2008

Problem 4. Gjeni të gjitha funksionet $f : (0,\infty) \to (0, \infty)$ (pra, f është i përcaktuar në bashkësinë e numrave realë positivë dhe merr vlera në bashkësinë e numrave realë positivë) të tillë që

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

për të gjithë numrat realë positivë w, x, y, z, që plotësojnë kushtin $wx = yz$.

Problem 5. Le të jenë n dhe k numra të plotë pozitivë ku $k \geq n$ and $k - n$ është një numër çift. Jepen $2n$ llampa, të etiketuara me numrat $1, 2, \ldots , 2n$, çdonjëra prej të cilave mund të jetë në njërën prej dy gjendjeve, *e ndezur* ose *e shuar*. Fillimisht, të gjitha llampat janë të shuara. Marrim në shqyrtim vargjet e *operacioneve* ku *operacion* do të quajmë ndryshimin e gjendjes së vetëm një llampe (nga e ndezur shuhet ose nga e shuar ndizet).

Le të jetë N numri i vargjeve të përbërë nga k operacione në fund të të cilave tw gjitha llampat nga 1 deri n janë të ndezura dhe të gjitha llampat nga $n + 1$ deri $2n$ janë të shuara.

Le të jetë M numri i vargjeve të përbërë nga k operacione në fund të të cilave tw gjitha llampat nga 1 deri n janë të ndezura, të gjitha llampat nga $n + 1$ deri $2n$ janë të shuara, por ku asnjëra prej llampave nga $n + 1$ deri $2n$ nuk është ndezur kurrë.

Përcaktoni raportin N/M.

Problem 6. Le të jetë $ABCD$ një katërkëndësh konveks me $BA \neq BC$. Le të jenë ω_1 dhe ω_2 rrathët brendashkruar, përkatësisht trekëndëshave ABC dhe ADC. Supozojmë që ekziston një rreth ω tangjent me zgjatimin e BA përtej A dhe me zgjatimin e BC përtej C dhe që është gjithashtu tangjent me drejtëzat AD and CD. Provoni që tangjentet e përbashkëta të jashtme të rrathëve ω_1 dhe ω_2 priten në një pike të rrethit ω.

Kohëzgjatja: 4 orë e 30 minuta
Çdo problem vlerësohet 7 pikë