| Language: **Arabic** | Day: **1** |
|---|---|

# 49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
# MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

**Wednesday, July 16, 200**

الأربعاء **16 – 7 – 2008**

**السؤال الأول:**

**ABC** مثلث حاد الزوايا ، **H** نقطة تلاقي ارتفاعاته.

نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **BC** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **BC** في نقطتين $A_1$ و $A_2$ ، بالمثل نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **CA** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **CA** في نقطتين $B_1$ و $B_2$ ، بالمثل أيضا نأخذ دائرة مركزها منتصف الضلع **AB** و تمر من النقطة **H** فتقطع المستقيم **AB** في نقطتين $C_1$ و $C_2$.

بين أن النقط $A_1$ ، $A_2$ ، $B_1$ ، $B_2$ ، $C_1$ ، $C_2$ تقع علي دائرة واحدة.

**السؤال الثانى:**

**a) لكل x ، y ، z أعداد حقيقية مختلفة عن العدد 1 بحيث $xyz = 1$**

**برهن أن :**

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

**b) برهن أن المتباينة المذكورة أعلاه تصبح مساواة لعدد غير منته من الثلاثيات النسبية x ، y ، z**

**حيث x ، y ، z مختلفة عن العدد 1 وَ $xyz = 1$**

**السؤال الثالث:**

**برهن أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث: $n^2+1$ له قاسما أوليا أكبر من $2n+\sqrt{2n}$.**

**Language : Arabic**

**مدة الاختبار أربع ساعات و نصف.**

**لكل سؤال سبع درجات.**

Language: **Arabic** Day: **2**

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

Thursday, July 17, 2008

الخميس 17 – 7 - 2008

**السؤال الرابع:**

**أوجد جميع الدوال $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (حيث f دالة من الأعداد الحقيقية الموجبة إلي الأعداد الحقيقية الموجبة)**

**التي تحقق $\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$ لكل الأعداد الحقيقية الموجبة $w,x,y,z$ حيث $wx=yz$**

**السؤال الخامس:**

**ليكن n و k عددين صحيحين موجبين حيث $k\ge n$ و $k-n$ عدد زوجي.**

**لدينا 2n مصباحا مرقمة 1 ، 2 ، ... ، 2n. كل مصباح من هذه المصابيح يمكن أن يكون في وضع ON (مضاء) أو وضع OFF (مطفئ). في البداية جميع المصابيح في وضع OFF.**

**الخطوة: هي تغيير وضع المصباح (من OFF إلى ON أو من ON إلى OFF)**

**السلسلة : هي عدد من الخطوات المتتالية.**

**ليكن N عدد السلاسل المكونة من k خطوة و التي تنتهي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح من 1 إلى n جميعها في الوضع ON و المصابيح من $n+1$ إلى 2n جميعها في الوضع OFF.**

**ليكن M عدد السلاسل المكونة من k خطوة و التي تنتهي إلى الحالة التي تكون فيها المصابيح من 1 إلى n جميعها في الوضع ON و المصابيح من $n+1$ إلى 2n جميعها في الوضع OFF بحيث أن المصابيح من $n+1$ إلى 2n لم تمس (لم يغير وضعها البدائي)**

**أوجد النسبة $\frac{N}{M}$.**

**السؤال السادس:**

**ليكن ABCD شكل رباعي (محدب) حيث $AB\neq BC$. نرمز بـــ $M_1$ و $M_2$ للدائرتين المرسومتين داخل المثلثين ABC و ADC والمماستين لهما علي التوالي.**

**نفترض أنه توجد دائرة M تمس امتداد ضلعي الزاوية ABC كما أنها تمس امتداد الضلعين AD و CD.**

**أثبت أن عامة المماسات الخارجية للدائرتين $M_1$ و $M_2$ تتقاطع في نقطة تنتمي للدائرة M .**

**Language : Arabic**

مدة الاختبار أربع ساعات و نصف.

لكل سؤال سبع درجات.