49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Wednesday, July 16, 2008

التمرين الأول

ليكن **ABC** مثلثا زواياه حادة و **H** مركز تعامده . الدائرة التي تمر من النقطة **H** و مركزها هو منتصف $[BC]$ تقطع المستقيم (BC) في A_1 و A_2 و الدائرة التي تمر من النقطة **H** و مركزها هو منتصف $[AC]$ تقطع المستقيم (AC) في B_1 و B_2 و الدائرة التي تمر من النقطة **H** و مركزها هو منتصف $[AB]$ تقطع المستقيم (AB) في C_1 و C_2.

بين أن النقط A_1 و A_2 و B_1 و B_2 و C_1 و C_2 متداورة أي أنها تنتمي لنفس الدائرة.

التمرين الثاني

1) بين أن : $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$ لكل x و y و z من $\mathbb{R}$ بحيث $x\neq 1$ و $y\neq 1$ و $z\neq 1$ و $xyz=1$.

2) بين أن حالة التساوي محققة بالنسبة لما لانهاية من الأعداد الجذرية x و y و z بحيث $x\neq 1$ و $y\neq 1$ و $z\neq 1$ و $xyz=1$.

التمرين الثالث

بين أنه توجد مالانهاية من الأعداد الصحيحة الموجبة قطعا n بحيث n^2+1 يقبل قاسما أوليا أكبر قطعا من $2n+\sqrt{2n}$.

Language : ARABIC MOROCCAN

مدة الإنجاز : أربع ساعات و نصف.

تمنح سبع نقط عن كل تمرين.

Language: **Arabic (Moroccan)** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Thursday, July 17, 2008

التمرين الرابع

حدد جميع الدوال f من $]0,+\infty[$ نحو $]0,+\infty[$ التي تحقق $\dfrac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\dfrac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$

لكل w و x و y و z من $]0,+\infty[$ بحيث $wx=yz$.

التمرين الخامس

ليكن n و k عددين صحيحين موجبين قطعا بحيث $k\geq n$ و $k-n$ زوجي .

لدينا $2n$ مصباحا مرقمة من 1 إلى $2n$. كل مصباح يكون إما مضاء (**ON**) أو مطفئا (**OFF**). في البداية نفترض أن جميع المصابيح في وضعية (**OFF**).

نعتبر سلسلة من k خطوة : في كل خطوة نختار أحد المصابيح بحيث إذا كان مطفئا (**OFF**) نجعله مضاء (**ON**) أما إذا كان مضاء (**ON**) فنجعله مطفئا (**OFF**).

ليكن N عدد السلسلات من k خطوة التي تنتهي بالوضعية التالية : المصابيح المرقمة من 1 إلى n مضاءة (**ON**) و المصابيح المرقمة من $n+1$ إلى $2n$ مطفئة (**OFF**).

ليكن M عدد السلسلات من k خطوة التي تنتهي إلى **نفس الوضعية** بدون لمس المصابيح المرقمة من $n+1$ إلى $2n$ جميعها أي بتركها مطفئة (**OFF**) منذ البداية .

حدد الخارج $\dfrac{N}{M}$.

التمرين السادس

$ABCD$ رباعي محدب بحيث $AB\neq BC$. نرمز ب ω_1 و ω_2 للدائرتين المحاطتين بالمثلثين **ABC** و **ADC** على التوالي .

نفترض أنه توجد دائرة ω مماسة لنصف المستقيم $[BA)$ بعد النقطة A (أي أن نقطة التماس لا تنتمي للقطعة $[BA]$) و مماسة لنصف المستقيم $[CA)$ بعد النقطة C و مماسة كذلك للمستقيمين **(AD)** و **(CD)**.

بين أن المماسان الخارجيان المشتركان للدائرتين ω_1 و ω_2 يتقاطعان في نقطة تنتمي للدائرة ω .

Language : ARABIC MOROCCAN

مدة الإنجاز : أربع ساعات و نصف.

تمنح سبع نقط عن كل تمرين.