Language: **Azerbaijani** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Çərşəmbə. 16 iyul 2008.

Məsələ 1. ABC itibucaqlı üçbucağın hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsi H olsun. H nöqtəsindən keçən və mərkəzi BC tərəfinin orta nöqtəsi olan çevrə BC tərəfini A_1 və A_2 nöqtələrində kəsir. Eyni qayda ilə H nöqtəsindən keçən və mərkəzi CA tərəfinin orta nöqtəsi olan çevrə CA tərəfini B_1 və B_2 nöqtələrində, H nöqtəsindən keçən və mərkəzi AB tərəfinin orta nöqtəsi olan çevrə isə AB tərəfini C_1 və C_2 nöqtələrində kəsir. Isbat edin ki, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 nöqtələri eyni çevrə üzərində yerləşirlər.

Məsələ 2. (a) $xyz = 1$ şərtini ödəyən hər biri vahiddən fərqli həqiqi x, y, z ədədləri üçün

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

bərabərsizliyini isbat edin.

(b) Isbat edin ki, $xyz = 1$ şərtini ödəyən sonsuz sayda hər biri vahiddən fərqli rasional x,y, z ədədlər üçlüsü üçün yuxarıda göstərilmiş bərabərsizlik bərabərliyə çevrilər.

Məsələ 3. Isbat edin ki, sonsuz sayda n natural ədədləri üçün $n^2 + 1$ ədədinin $2n+\sqrt{2n}$ -dən boyük sadə böləni vardır.

Language: Azerbaijani

Vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Cümə axşamı. 17 iyul 2008.

Məsələ 4. $wx = yz$ olmaqla istənilən w, x, y, z müsbət həqiqi ədədləri üçün

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

şərtini ödəyən bütün $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (yəni bütün müsbət həqiqi ədədlər üçün təyin olunmuş və müsbət qiymətlər alan) funksiyalarını müəyyən edin.

Məsələ 5. n və k müsbət tam ədədlər olmaqla $k \ge n$ və $k-n$ cüt ədəddir. $1, 2, \ldots, 2n$ ədədləri ilə nömrələnmiş $2n$ sayda lampanın hər biri *yanar* və ya *sönmüş* halda ola bilər. Başlanğıcda lampaların hamısı *sönmüş* haldadır. Həmlələr ardıcıllığının hər həmləsində bir lampa seçilərək onun vəziyəti dəyişdirilir (yanırsa söndürülür və ya sönübsə yandırılır).

Nəticədə *1*-dən *n*-ə qədər olan lampaları *yanar* və $n + 1$ dən *2n* –ə qədər olan lampaları *sönmüş* hala gətirən k sayda həmlədən ibarət, mümkün olan bütün həmlələr ardıcıllıqlarının sayı N olsun.

Nəticədə yenə *1*-dən *n*-ə qədər olan lampaları *yanar* və $n + 1$ dən $2n$–ə qədər olan lampaları *sönmüş* hala gətirən və k sayda həmlədən ibarət, lakin $n + 1$ dən $2n$ –ə qədər olan lampalarla heç həmlə edilməyən mümkün olan bütün həmlələr ardıcıllıqlarının sayı isə M olsun.

N/M nisbətinin qiymətini tapın.

Məsələ 6. $|BA| \neq |BC|$ olmaqla $ABCD$ qabarıq dördbucaqlısı verilmişdir. ABC və ADC üçbucaqlarının daxilinə çəkilmiş çevrələri uyğun olaraq ω_1 və ω_2 ilə işarə edək. Tutaq ki, BA şuasına A nöqtəsindən sonra bir nöqtədə və BC şuasına C nöqtəsindən sonra bir nöqtədə toxunan ω çevrəsi AD və CD tərəflərinə də toxunur. Isbat edin ki, ω_1 və ω_2 çevrələrinin ortaq xarici toxunanları ω çevrəsi üzərində kəsişirlər.

Vaxt: 4 saat 30 dəqiqə
Hər sual 7 bal dəyərindədir.