49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Srijeda, 16.07.2008.

Zadatak 1. Neka je H ortocentar oštrouglog trougla ABC. Kružnica čiji je centar središte duži BC i koja sadrži H siječe pravu BC u tačkama A_1 i A_2. Analogno, kružnica čiji je centar središte duži CA i koja sadrži H siječe pravu CA u tačkama B_1 i B_2, a kružnica čiji je centar središte duži AB i koja sadrži H siječe pravu AB u tačkama C_1 i C_2. Dokazati da tačke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 pripadaju jednoj kružnici.

Zadatak 2. (a) Dokazati da je

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

za sve realne brojeve x, y, z, takve da nijedan od njih nije jednak 1 i za koje važi $xyz = 1$.

(b) Dokazati da se jednakost dostiže za beskonačno mnogo trojki racionalnih brojeva x, y, z, takvih da nijedan od njih nije jednak 1 i za koje važi $xyz = 1$.

Zadatak 3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n^2 + 1$ ima prost djelilac veći od $2n + \sqrt{2n}$.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Četvrtak, 17.07.2008.

Zadatak 4. Odrediti sve funkcije $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (tj. f je funkcija koja slika pozitivne realne brojeve u pozitivne realne brojeve) za koje je

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

za sve pozitivne realne brojeve w, x, y, z za koje važi $wx=yz$.

Zadatak 5. Neka su n i k prirodni brojevi za koje je $k\geqslant n$ i $k-n$ paran broj. Dato je $2n$ lampi, označenih brojevima $1, 2, \ldots, 2n$; svaka od njih može biti u jednom od sljedeća dva stanja: *uključena* ili *isključena*. U početku su sve lampe isključene. Posmatrajmo nizove *koraka*: u svakom od koraka mijenja se stanje tačno jedne lampe (uključena postaje isključena, a isključena uključena).

Neka je N broj takvih nizova od k koraka, tako da se dobije stanje u kome su sve lampe označene brojevima 1 do n uključene, a sve lampe označene brojevima $n+1$ do $2n$ isključene.

Neka je M broj takvih nizova od k koraka, tako da se dobije stanje u kome su sve lampe označene brojevima 1 do n uključene, a sve lampe označene brojevima $n+1$ do $2n$ isključene i pritom nijednom nije mijenjano stanje lampi označenih brojevima $n+1$ do $2n$.

Izračunati N/M.

Zadatak 6. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga je $|BA|\neq|BC|$. Neka su ω_1 i ω_2 upisane kružnice trouglova ABC i ADC, redom. Neka postoji kružnica ω koja dodiruje polupravu BA nakon tačke A i polupravu BC nakon tačke C, a koja istovremeno dodiruje i prave AD i CD. Dokazati da se zajedničke spoljašnje tangente kružnica ω_1 i ω_2 seku na ω.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena