49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Сряда, 16 Юли, 2008

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H. Окръжността с център средата на BC, минаваща през H, пресича правата BC в точки A_1 и A_2. Аналогично, окръжността с център средата на CA, минаваща през H, пресича правата CA в точки B_1 и B_2, и окръжността с център средата на AB, минаваща през H, пресича правата AB в точки C_1 и C_2. Да се докаже, че точките A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на една окръжност.

Задача 2. а) Да се докаже, че

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

за всички реални числа x, y, z, всяко от които е различно от 1 и за които $xyz=1$.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки от рационални числа x, y, z, всяко от които е различно от 1 и за които $xyz=1$, за които се достига равенство в а).

Задача 3. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които числото n^2+1 има прост делител, по-голям от $2n+\sqrt{2n}$.

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Language: **Bulgarian** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четвъртък, 17 Юли, 2008

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (т.е. f е функция от реалните положителни числа към реалните положителни числа), такива, че

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

за всички реални положителни w, x, y и z, удовлетворяващи равенството $wx = yz$.

Задача 5. Нека n и k са естествени числа, за които $k \geq n$ и $k - n$ е четно число. Дадени са $2n$ лампи, означени съответно с $1, 2, \ldots, 2n$. Всяка от лампите може да бъде *включена* или *изключена*. В началото всички лампи са изключени. Разглеждаме редици от *стъпки*: на всяка стъпка една от лампите се превключва (от включена на изключена или от изключена на включена).

Нека N е броят на редиците от k стъпки, които водят до следното състояние: лампите от 1 до n са включени, а лампите от $n + 1$ до $2n$ са изключени.

Нека M е броят на редиците от k стъпки, които водят до същото състояние: лампите от 1 до n са включени, а лампите от $n + 1$ до $2n$ са изключени, като никоя от лампите от $n + 1$ до $2n$ не е включвана нито веднъж.

Да се намери отношението N/M.

Задача 6. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $|BA| \neq |BC|$. Вписаните в триъгълниците ABC и ADC окръжности са означени съответно с ω_1 и ω_2. Известно е, че съществува окръжност ω, която се допира до лъча BA в точка след A, до лъча BC в точка след C и до правите AD и CD. Да се докаже, че общите външни допирателни на ω_1 и ω_2 се пресичат върху ω.

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки