49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Středa, 16. července 2008

Úloha 1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek. Kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany BC protíná přímku BC v bodech A_1 a A_2. Podobně kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany CA protíná přímku CA v bodech B_1 a B_2 a kružnice procházející bodem H se středem ve středu strany AB protíná přímku AB v bodech C_1 a C_2. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.

Úloha 2. (a) Dokažte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqq 1$$

pro všechna reálná čísla x, y, z různá od 1 a splňující rovnost $xyz = 1$.

(b) Dokažte, že v uvedené nerovnosti platí rovnost pro nekonečně mnoho trojic racionálních čísel x, y, z různých od 1 a splňujících rovnost $xyz = 1$.

Úloha 3. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel n, pro něž má číslo $n^2 + 1$ prvočinitel větší než $2n + \sqrt{2n}$.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Čtvrtek, 17. července 2008

Úloha 4. Najděte všechny funkce $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ takové, že

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pro všechna kladná reálná čísla w, x, y, z splňující rovnost $wx = yz$.

Úloha 5. Nechť n a k jsou kladná celá čísla, kde $k \geqq n$ a $k - n$ je sudé číslo. Je dáno $2n$ lamp označených čísly $1, 2, \ldots, 2n$, přičemž každá z nich může být *zapnutá* či *vypnutá*. Na počátku jsou všechny lampy vypnuté. Uvažujme posloupnosti *kroků*: v každém kroku jednu z lamp přepneme (vypnutou zapneme či zapnutou vypneme).

Označme N počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ jsou vypnuté.

Označme M počet všech takových posloupností k kroků, jež vedou do stavu, kdy všechny lampy 1 až n jsou zapnuté a všechny lampy $n + 1$ až $2n$ jsou vypnuté, přičemž žádná z lamp $n + 1$ až $2n$ nebyla nikdy zapnutá.

Určete podíl N/M.

Úloha 6. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $|BA| \neq |BC|$. Označme ω_1 a ω_2 kružnice vepsané trojúhelníkům ABC a ADC. Předpokládejme, že existuje kružnice ω, jež se dotýká polopřímky BA za bodem A, polopřímky BC za bodem C a zároveň i obou přímek AD a CD. Dokažte, že společné vnější tečny kružnic ω_1 a ω_2 se protínají v bodě kružnice ω.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat 7 bodů