Language: **Danish** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Onsdag den 16. juli 2008

Opgave 1. Lad ABC være en spidsvinklet trekant og lad H være højdernes skæringspunkt. Cirklen gennem H og med centrum i BC's midtpunkt skærer linjen BC i punkterne A_1 og A_2. På samme måde skærer cirklen gennem H og med centrum i CA's midtpunkt linjen CA i B_1 og B_2, mens cirklen gennem H og med centrum i AB's midtpunkt skærer linjen AB i C_1 og C_2. Vis at punkterne A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 og C_2 ligger på en og samme cirkel.

Opgave 2. **(a)** Vis at følgende ulighed gælder for alle reelle tal x, y og z forskellige fra 1 og som opfylder $xyz = 1$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(b) Vis at der findes uendelig mange tripler af rationale tal x, y og z forskellige fra 1 og med $xyz = 1$ således at lighedstegnet gælder i uligheden ovenfor.

Opgave 3. Vis at der findes uendelig mange positive heltal n således at $n^2 + 1$ har en primfaktor større end $2n + \sqrt{2n}$.

Tid til disposition: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave bedømmes med op til 7 point

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Torsdag den 17. juli 2008

Oppgave 4. Find alle funktioner $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ (dvs. at f er en funktion fra de positive reelle tal til de positive reelle tal) således at

$$\frac{\left(f(w)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

for alle reelle $w, x, y, z > 0$ som opfylder $wx = yz$.

Oppgave 5. Lad n og k være positive heltal således at $k \geq n$ og $k - n$ er lige. Lad der være givet $2n$ lamper (nummereret $1, 2, \ldots, 2n$), som hver kan være tændt eller slukket. Til at begynde med er alle lamper slukket. Vi betragter nu følger af *træk*: i hvert træk enten tænder vi én lampe der var slukket eller vi slukker én der var tændt.
Lad N være antallet af sådanne følger bestående af k træk og som resulterer i at lamperne 1 til n alle er tændt, mens alle lamperne $n + 1$ til $2n$ er slukket.
Lad M være antallet af sådanne følger bestående af k træk og som resulterer i at lamperne 1 til n alle er tændt, mens lamperne $n + 1$ til $2n$ alle er slukket, men hvor ingen af lamperne $n + 1$ til $2n$ har været tændt undervejs.
Bestem forholdet N/M.

Oppgave 6. Lad $ABCD$ være en konveks firkant med $|AB| \neq |BC|$. Lad ω_1 og ω_2 betegne henholdsvis ABC's og ADC's indskrevne cirkel. Antag at der findes en cirkel ω som tangerer halvlinjen BA på forlængelsen udover A og halvlinjen BC udover C, og som samtidig tangerer linjerne AD og CD. Vis at de fælles ydre tangenter til ω_1 og ω_2 skærer hinanden i et punkt på ω.

Tid til disposition: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave bedømmes med op til 7 point