Language: **German** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Mittwoch, 16. Juli 2008

Aufgabe 1. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Höhenschnittpunkt H. Der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von BC ist, schneide BC in A_1 und A_2. Dementsprechend schneide der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von CA ist, CA in B_1 und B_2 und der Kreis durch H, dessen Zentrum der Mittelpunkt von AB ist, AB in C_1 und C_2.
Man zeige, dass die Punkte $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 2. (a) Man zeige

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (*)$$

für alle reellen Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt.

(b) Man zeige, dass für unendlich viele Tripel rationaler Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt, in $(*)$ der Gleichheitsfall eintritt.

Aufgabe 3. Man beweise, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen n gibt, für die $n^2 + 1$ einen Primfaktor größer als $2n + \sqrt{2n}$ besitzt.

Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Language: **German** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Donnerstag, 17. Juli 2008

Aufgabe 4. Man bestimme alle Funktionen $f\colon]0,\infty[\,\to\,]0,\infty[$ (d.h. f ist auf der Menge der positiven reellen Zahlen definiert und nimmt nur positive reelle Zahlen als Werte an), die

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

für alle positiven reellen Zahlen w, x, y, z mit $wx = yz$ erfüllen.

Aufgabe 5. Seien n und k positive ganze Zahlen mit $k \geq n$ und $k - n$ gerade. Gegeben seien $2n$ Lampen, die von 1 bis $2n$ nummeriert sind. Jede Lampe ist entweder *an* oder *aus*, wobei anfangs alle Lampen aus sind. Man betrachte Folgen von *Schritten*: in jedem Schritt werde genau eine der Lampen umgeschaltet (von aus nach an oder von an nach aus).
Sei N die Anzahl solcher Folgen, die aus k Schritten bestehen und in dem Zustand enden, in dem die Lampen 1 bis n alle an und die Lampen $n+1$ bis $2n$ alle aus sind.
Sei M die Anzahl solcher Folgen, die aus k Schritten bestehen und in dem Zustand enden, in dem die Lampen 1 bis n alle an und die Lampen $n+1$ bis $2n$ alle aus sind, bei denen aber keine der Lampen $n+1$ bis $2n$ jemals umgeschaltet worden ist.
Man bestimme das Verhältnis N/M.

Aufgabe 6. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $|BA| \neq |BC|$. Es seien ω_1 bzw. ω_2 die Inkreise der Dreiecke ABC bzw. ADC. Angenommen es existiert ein Kreis ω, der den Strahl BA in einem Punkt jenseits von A und den Strahl BC in einem Punkt jenseits von C berührt und auch die Geraden AD und CD als Tangenten hat.
Man beweise, dass sich die äußeren gemeinsamen Tangenten von ω_1 und ω_2 auf ω schneiden.

Arbeitszeit: 4 Stunden 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.