Language: **Hebrew** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

יום רביעי 16 ביולי, 2008

בעיה 1. נקודת מפגש הגבהים של המשולש החד-זוויות ABC היא H. המעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע BC חותך את הישר BC בנקודות A_1 ו A_2. באופן דומה, המעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע CA חותך את הישר CA בנקודות B_1 ו B_2, והמעגל העובר דרך H ומרכזו בנקודת האמצע של הקטע AB חותך את הישר AB בנקודות C_1 ו C_2 . הראה כי הנקודות $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ נמצאות על מעגל אחד.

בעיה 2. (a) הוכח כי

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

עבור כל המספרים הממשיים x, y, z השונים כל אחד מ 1, והמקיימים את התנאי $xyz = 1$.

(b) הוכח כי קיים מספר אינסופי של שלשות של מספרים רציונליים x, y, z השונים כל אחד מ 1, והמקיימים את התנאי $xyz = 1$, אשר עבורן מתקיים שוויון באי השוויון למעלה.

בעיה 3. הוכח כי קיים מספר אינסופי של מספרים שלמים חיוביים n כך שלמספר $n^2 + 1$ יש מחלק ראשוני גדול מ $2n+\sqrt{2n}$.

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות וחצי
כל שאלה שווה 7 נקודות

Language: **Hebrew** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

יום חמישי 17 ביולי, 2008

בעיה 4. מצא את כל הפונקציות $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (כלומר f היא פונקציה מקבוצת המספרים הממשיים החיוביים לקבוצת המספרים הממשיים החיוביים) כך ש

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

עבור על המספרים הממשיים החיוביים w, x, y, z המקיימים $wx=yz$.

בעיה 5. יהיו n ו k מספרים שלמים חיוביים כך ש $k\geq n$ ו- $k-n$ הוא מספר זוגי. נתונות $2n$ נורות הממוספרות $1, 2, \ldots, 2n$. כל נורה יכולה להיות במצב *כבוי* או *דולק*. בתחילה, כל הנורות נמצאות במצב כבוי. נתבונן בסדרות של *צעדים*: בכל צעד מחליפים את מצבה של נורה אחת (ממצב כבוי למצב דולק או ממצב דולק למצב כבוי).

יהי N המספר של סדרות הצעדים המכילות k צעדים ומובילות למצב הסופי שבו כל הנורות 1 עד n נמצאות במצב דולק, וכל הנורות $n+1$ עד $2n$ נמצאות במצב כבוי.

יהי M המספר של סדרות הצעדים המכילות k צעדים ומובילות למצב הסופי שבו כל הנורות 1 עד n נמצאות במצב דולק, וכל הנורות $n+1$ עד $2n$ נמצאות במצב כבוי, אבל אף אחת מהנורות $n+1$ עד $2n$ לא הודלקה במהלך סדרת הצעדים.

מצא את היחס N/M.

בעיה 6. יהי $ABCD$ מרובע קמור שבו $|BA|\neq|BC|$. נסמן את המעגל החסום במשולש ABC ואת המעגל החסום במשולש ADC ב ω_1 ו ω_2 בהתאמה. נניח כי קיים מעגל ω המשיק לקרן BA בנקודה הנמצאת מעבר ל A, ומשיק לקרן BC בנקודה הנמצאת מעבר ל C, וכמו כן משיק לישרים AD ו CD. הוכח כי המשיקים המשותפים החיצוניים של המעגלים ω_1 ו ω_2 נחתכים על ω.

Language: Hebrew (Israel)

הזמן המוקצב: 4 שעות וחצי
כל שאלה שווה 7 נקודות