49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Τετάρτη, 16 Ιουλίου 2008

Πρόβλημα 1. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ABC με ορθόκεντρο το σημείο H. Ο κύκλος που περνάει από το H και έχει κέντρο το μέσον της πλευράς BC τέμνει την ευθεία BC στα σημεία A_1 και A_2. Ομοίως, ο κύκλος που περνάει από το H και έχει κέντρο το μέσον της πλευράς CA τέμνει την ευθεία CA στα σημεία B_1 και B_2, και ο κύκλος που περνάει από το H και έχει κέντρο το μέσον της πλευράς AB τέμνει την ευθεία AB στα σημεία C_1 και C_2.
Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 2. (α) Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1, \qquad (*)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, που είναι διαφορετικοί από το 1 και ικανοποιούν την ισότητα $xyz = 1$.

(β) Να αποδείξετε ότι στη σχέση (*) η ισότητα ισχύει για άπειρο πλήθος τριάδων ρητών αριθμών x, y, z, που είναι διαφορετικοί από το 1 και ικανοποιούν την ισότητα $xyz = 1$.

Πρόβλημα 3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι αριθμοί n τέτοιοι ώστε ο αριθμός $n^2 + 1$ να έχει ένα πρώτο διαιρέτη, που είναι μεγαλύτερος από το $2n+\sqrt{2n}$.

Διάρκεια διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Πέμπτη, 17 Ιουλίου 2008

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ (δηλαδή, η f είναι συνάρτηση από το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών) για τις οποίες ισχύει:

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2},$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς w, x, y, z, που ικανοποιούν την ισότητα $wx = yz$.

Πρόβλημα 5. Έστω n και k θετικοί ακέραιοι με $k \geq n$ και $k-n$ άρτιος. Δίνονται $2n$ λαμπτήρες αριθμημένοι με τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 2n$, ο καθένας από τους οποίους μπορεί να είναι στην κατάσταση *αναμμένος* ή στην κατάσταση *σβηστός*. Αρχικά όλοι οι λαμπτήρες είναι *σβηστοί*. Θεωρούμε ακολουθίες *βημάτων*, στις οποίες σε κάθε *βήμα* ένας μόνο από τους λαμπτήρες αλλάζει κατάσταση (από *αναμμένος* σε *σβηστός* ή από *σβηστός* σε *αναμμένος)*.
Έστω N ο αριθμός εκείνων των ακολουθιών που αποτελούνται από k βήματα και έχουν ως αποτέλεσμα την κατάσταση κατά την οποία οι λαμπτήρες με αριθμό από 1 μέχρι n είναι όλοι αναμμένοι και οι λαμπτήρες από $n+1$ μέχρι $2n$ είναι όλοι σβηστοί.
Έστω M ο αριθμός εκείνων των ακολουθιών που αποτελούνται από k βήματα και έχουν ως αποτέλεσμα την κατάσταση κατά την οποία οι λαμπτήρες με αριθμό από 1 μέχρι n είναι όλοι αναμμένοι και οι λαμπτήρες με αριθμό από $n+1$ μέχρι $2n$ είναι όλοι σβηστοί, αλλά κανένας από τους λαμπτήρες με αριθμό από $n+1$ μέχρι $2n$ ποτέ δεν βρέθηκε στη κατάσταση *αναμμένος*.
Να προσδιορίσετε το λόγο N/M.

Πρόβλημα 6. Έστω $ABCD$ κυρτό τετράπλευρο με $|BA| \neq |BC|$. Συμβολίζουμε τους εγγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ABC και ADC με ω_1 και ω_2, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κύκλος ω ο οποίος εφάπτεται της προέκτασης της πλευράς BA προς το μέρος του A και της προέκτασης της πλευράς BC προς το μέρος του C, ο οποίος επίσης είναι εφαπτόμενος των ευθειών AD και CD.
Να αποδείξετε ότι οι κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων ω_1 και ω_2 τέμνονται πάνω στον κύκλο ω.

Διάρκεια διαγωνισμού: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες