Language: **Croatian** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Srijeda, 16. srpnja 2008.

Zadatak 1. Točka H je ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica sa središtem u polovištu stranice $\overline{BC}$ prolazi kroz H i siječe pravac BC u A_1 i A_2. Slično, kružnica sa središtem u polovištu od $\overline{CA}$ prolazi kroz H i siječe pravac CA u B_1 i B_2; kružnica sa središtem u polovištu od $\overline{AB}$ prolazi kroz H i siječe pravac AB u C_1 i C_2. Dokaži da sve točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leže na kružnici.

Zadatak 2. (a) Dokaži da vrijedi:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

za sve realne brojeve x, y, z, od kojih je svaki različit od 1, i zadovoljavaju uvjet $xyz=1$.

(b) Dokaži da jednakost vrijedi za beskonačno mnogo trojki racionalnih brojeva x, y, z, od kojih je svaki različit od 1, i zadovoljavaju uvjet $xyz=1$.

Zadatak 3. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je n^2+1 djeljivo prostim brojem koji je veći od $2n+\sqrt{2n}$.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Četvrtak, 17. srpnja 2008.

Zadatak 4. Nađi sve funkcije $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (f je funkcija sa skupa pozitivnh realnih brojeva u skup pozitivnh realnih brojeva) takvih da vrijedi

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2},$$

za sve pozitivne realne brojeve w, x, y, z, koji zadovljavaju uvjet $wx = yz$.

Zadatak 5. Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $k \geq n$ i $k - n$ paran broj. Dano je $2n$ žarulja označenih s $1, 2, \ldots, 2n$ i svaka od njih može biti ili *upaljena* ili *ugašena*. Na početku su sve žarulje ugašene. Promatraj nizove *koraka*: u svakom koraku točno jedna žarulja promijeni svoje stanje (ako je bila upaljena, ugasi se, a ako je bila ugašena, upali se).

Neka je N broj takvih nizova od kojih svaki ima k koraka i na kraju su sve žarulje od 1 do n upaljene, dok su sve žarulje od $n + 1$ do $2n$ ugašene.

Neka je M broj nizova od kojih svaki ima k koraka, i na kraju su sve žarulje od 1 do n upaljene, dok su sve žarulje od $n + 1$ do $2n$ ugašene, i nijedna od žarulja $n + 1$ do $2n$ nije se niti palila niti gasila.

Odredi omjer N/M.

Zadatak 6. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|BA| \neq |BC|$. Označimo kružnice upisane trokutima ABC i ADC s ω_1 i ω_2, tim redom. Pretpostavi da postoji kružnica ω koja dodiruje polupravac BA u točki nakon A i polupravac BC u točki nakon C, a isto tako dodiruje pravce AD i CD. Dokaži da se zajedničke vanjske tangente kružnica ω_1 i ω_2 sijeku na kružnici ω.

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova