Language: **Icelandic** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Miðvikudagur 16. júlí 2008

Dæmi 1. Hæðir hvasshyrnds þríhyrningis ABC skerast í punkti H. Hringur sem fer um H og með miðju í miðpunktir BC sker línuna BC í A_1 og A_2. Annar hringur sem liggur um H með miðju í miðpunkti CA sker línuna CA í B_1 og B_2, og að lokum er hringur sem liggur um H með miðju í miðpunkti AB og sker línuna AB í C_1 og C_2. Sýnið að A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 liggi allir á sama hring.

Dæmi 2. (a) Sannið ójöfnuna

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

fyrir allar rauntölur x, y, z, þar sem $xyz = 1$ og engin þeirra er jöfn 1.

(b) Sannið að jafnaðarmerkið gildi í ójöfnunni að ofan fyrir óendanlega margar þrenndir af ræðum tölum x, y, z, þar sem $xyz = 1$ og engin þeirra er jöfn 1.

Dæmi 3. Sannið að til séu óendanlega margar jákvæðar heiltölur n þannig að $n^2 + 1$ hafi frumdeili sem er stærri en $2n+\sqrt{2n}$.

Language: Icelandic

Tími: 4 klst. og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Fimmtudagur 17. júlí 2008

Dæmi 4. Finnið öll föll $f:]0,\infty[\to]0, \infty[$ (það er, f er fall sem varpar jákvæðum rauntölum yfir í jákvæðar rauntölur) þannig að

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

gildi fyrir allar jákvæðar rauntölur w, x, y, z, þar sem $wx = yz$.

Dæmi 5. Látum n og k vera jákvæðar heiltölur þannig að $k \geq n$ og að $k - n$ sé slétt tala. Við höfum $2n$ ljósaperur sem eru númeraðar $1, 2, \ldots, 2n$. Annað hvort er kveikt eða slökkt á peru. Í upphafi er slökkt á öllum perunum. Við lítum á röð *aðgerðarskrefa*: í hverju skrefi er kveikt eða slökkt á peru (kveikt verður slökkt og slökkt verður kveikt).

Látum N vera fjölda raða sem verða til í k skrefum sem enda í stöðu þar sem kveikt er á öllum perum 1 til n en slökkt er á öllum perunum frá $n + 1$ til $2n$.

Látum M vera fjölda raða sem verða til í k skrefum sem enda í stöðu þar sem kveit er á öllum perum 1 til n en slökkt er á öllum perunum frá $n + 1$ til $2n$ en það var aldrei kveikt á perunum frá $n + 1$ til $2n$.

Finnið hlutfallið N/M.

Dæmi 6. Látum $ABCD$ vera kúptan ferhyrning og $|BA| \neq |BC|$. Táknum innritaða hringi þríhyrninganna ABC og ADC með ω_1 og ω_2. Gerum ráð fyrir að til sé hringur ω sem snertir hálflínuna BA framlengda út fyrir A og hálflínuna BC framlengda út fyrir C, og snertir einnig línurnar AD og CD. Sannið að sameiginlegir ytri snertlar ω_1 og ω_2 skerist í punkti sem er á ω.

Tími: 4 klst. og 30 mínútur
Hvert dæmi gildir 7 stig