

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Rabu, 16 Juli 2008

Soal 1. Misalkan H adalah titik potong garis-garis tinggi (orthocentre) dari segitiga lancip ABC . Lingkaran yang melalui H dan berpusat pada titik tengah BC memotong garis BC di A_1 dan A_2 . Secara serupa, lingkaran yang melalui H dan berpusat pada titik tengah CA memotong garis CA di B_1 dan B_2 , dan lingkaran yang melalui H dan berpusat pada titik tengah AB memotong garis AB di C_1 dan C_2 . Buktikan bahwa $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ terletak pada suatu lingkaran.

Soal 2. (a) Buktikan bahwa

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

untuk semua bilangan real x, y, z , yang masing-masing tidak sama dengan 1, dan memenuhi $xyz = 1$.

(b) Buktikan bahwa kesamaan di atas berlaku untuk tak hingga banyak triple bilangan rasional x, y, z , yang masing-masing tidak sama dengan 1, dan memenuhi $xyz = 1$.

Soal 3. Buktikan bahwa ada tak hingga banyak bilangan bulat positif n sehingga $n^2 + 1$ mempunyai suatu pembagi prima yang lebih besar dari $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Kamis, 17 Juli 2008

Soal 4. Cari semua fungsi $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ (yaitu, f adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan real positif ke himpunan bilangan real positif) sehingga

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

untuk semua bilangan real positif w, x, y, z , dengan $wx = yz$.

Soal 5. Misalkan n dan k bilangan bulat positif dengan $k \geq n$ dan $k - n$ suatu bilangan genap. Misalkan $2n$ lampu dilabeli $1, 2, \dots, 2n$, masing-masing bisa *hidup* or *mati*. Mula-mula semua lampu mati. Diberikan barisan *langkah*: pada masing-masing langkah salah satu lampu diubah (dari hidup ke mati atau dari mati ke hidup).

Misalkan N adalah cacah dari barisan yang terdiri dari k langkah dan menghasilkan keadaan dimana lampu-lampu 1 sampai n semuanya hidup, dan lampu-lampu $n + 1$ sampai $2n$ semuanya mati.

Misalkan M adalah cacah dari barisan yang terdiri dari k langkah, menghasilkan keadaan dimana lampu-lampu 1 sampai n semuanya hidup, dan lampu-lampu $n + 1$ sampai $2n$ semuanya mati, tetapi tidak ada lampu $n + 1$ sampai $2n$ yang pernah dihidupkan.

Tentukan ratio N/M .

Soal 6. Misalkan $ABCD$ adalah segiempat konveks dengan $|BA| \neq |BC|$. Lingkaran dalam segitiga-segitiga ABC dan ADC berturut-turut adalah ω_1 dan ω_2 . Misalkan terdapat suatu lingkaran ω menyinggung sinar BA ke arah A dan menyinggung sinar BC ke arah C , juga menyinggung garis-garis AD dan CD . Buktikan bahwa garis-garis singgung luar sekutu dari ω_1 dan ω_2 berpotongan pada ω .