49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Mercoledì 16 luglio 2008

Problema 1. Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro H. La circonferenza con centro il punto medio di BC e passante per H interseca la retta BC in A_1 e A_2. Analogamente, la circonferenza con centro il punto medio di CA e passante per H interseca la retta CA in B_1 e B_2, e la circonferenza con centro il punto medio di AB e passante per H interseca la retta AB in C_1 e C_2. Dimostrare che A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 giacciono su una medesima circonferenza.

Problema 2. (a) Dimostrare che

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (*)$$

per tutti i numeri reali x, y, z diversi da 1 e tali che $xyz = 1$.

(b) Dimostrare che esistono infinite terne di numeri razionali x, y, z, diversi da 1 e tali che $xyz = 1$, per i quali in $(*)$ vale l'uguaglianza.

Problema 3. Dimostrare che esistono infiniti interi positivi n tali che $n^2 + 1$ ha un divisore primo maggiore di $2n + \sqrt{2n}$.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Giovedì 17 luglio 2008

Problema 4. Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (cioè le funzioni f definite nell'insieme dei numeri reali positivi e a valori nell'insieme dei numeri reali positivi) tali che

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

per tutti i numeri reali positivi w, x, y, z che soddisfano $wx = yz$.

Problema 5. Siano n e k interi positivi tali che $k \geq n$ e $k - n$ è pari. Siano date $2n$ lampade, etichettate con i numeri 1, 2, …, $2n$, ciascuna delle quali può essere *accesa* o *spenta*. Inizialmente tutte le lampade sono spente. Consideriamo successioni di *operazioni*, dove un'operazione consiste nel cambiare lo stato di esattamente una lampada (da accesa a spenta o da spenta ad accesa).

Sia N il numero di successioni consistenti di k operazioni al termine delle quali tutte le lampade da 1 a n sono accese e tutte le lampade da $n + 1$ a $2n$ sono spente.

Sia M il numero di successioni consistenti di k operazioni al termine delle quali tutte le lampade da 1 a n sono accese, tutte le lampade da $n + 1$ a $2n$ sono spente, ma in cui nessuna delle lampade da $n + 1$ a $2n$ è mai stata accesa.

Determinare il rapporto N/M.

Problema 6. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso con $BA \neq BC$. Siano ω_1 e ω_2 le circonferenze inscritte ai triangoli ABC e ADC rispettivamente. Supponiamo che esista una circonferenza ω tangente alla semiretta BA in un punto oltre A, tangente alla semiretta BC in un punto oltre C, e che sia tangente anche alle rette AD e CD.

Dimostrare che le tangenti comuni esterne di ω_1 e ω_2 si intersecano in un punto di ω.

Tempo: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti