49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Сәрсенбі, 16 шілде, 2008

Есеп 1. Сүйір бұрышты ABC үшбұрышының ортоцентрі H болсын. Центрі BC қабырғасының ортасы болатын және H нүктесі арқылы өтетін шеңбер BC түзуін A_1 және A_2 нүктелерінде қияды. Тура солай, центрі CA қабырғасының ортасы болатын және H нүктесі арқылы өтетін шеңбер CA түзуін B_1 және B_2 нүктелерінде қияды, және центрі AB қабырғасының ортасы болатын және H нүктесі арқылы өтетін шеңбер AB түзуін C_1 және C_2 нүктелерінде қияды. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 нүктелерінің бір шеңбердің бойында жататынын дәлелде.

Есеп 2. (a) 1-ден өзгеше, $xyz = 1$ теңдігін қанағаттандыратын нақты x, y, z сандар үшін

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

теңсіздігін дәлелде.

(b) Жоғардағы теңсіздік 1-ден өзгеше, $xyz = 1$ теңдігін қанағаттандыратын рационал x, y, z сандарының ақырсыз көп үштіктері үшін теңдікке айналатынын дәлелде.

Есеп 3. Ақырсыз көп натурал n саны үшін n^2+1 санының $2n+\sqrt{2n}$ санынан үлкен жәй бөлгіші табылатынын дәлелде.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Бейсенбі, 17 шілде, 2008

Есеп 4. $wx = yz$ теңдігін қанағаттандыратын кез келген оң нақты w, x, y, z сандары үшін

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

тепе теңдігі орындалатындай барлық $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ функцияларын анықта (яғни, f оң нақты сандар жиынында анықталған және мәндерін сол жиында қабылдайды).

Есеп 5. n және k натурал сандары берілген, $k \geq n$ және $(k-n)$ − жұп сан. Оған қоса, 1, 2, … , $2n$ сандарымен нөмірленген $2n$ лампа берілген. Олардың әрқайсысы *жанып* немесе *өшіп* тұрады. Бастапқыда лампалардың бәрі өшіп тұр. Біз қадамдардың ретті тізбегін қарастырамыз: әр қадамда дәл бір лампаның күйі өзгереді (яғни, жанып тұрса, өшеді, немесе өшіп тұрса, жанады).

k қадамнан тұратын және ең соңында 1-шіден n-шіге дейінгі лампалар жандырып, ал $(n+1)$-шіден $2n$-шіге дейінгі лампаларды өшіретін тізбектердің санын N деп белгілейік.

k қадамнан тұратын және ең соңында 1-шіден n-шіге дейінгі лампалар жандырып, ал $(n+1)$-шіден $2n$-шіге дейінгі лампаларға тіпті тиіспейтін тізбектердің санын M деп белгілейік.

N/M бөлшегінің мәнін анықта.

Есеп 6. Дөңес $ABCD$ төртбұрышында $|BA| \neq |BC|$. ABC және ADC үшбұрыштарына іштей сызылған шеңберлерді сәйкесінше ω_1 және ω_2 деп белгілейік. BA кесіндісінің A нүктесінің арғы жағынан созындысын, BC кесіндісінің C нүктесінің арғы жағынан созындысын, оған қоса, AD және CD түзулерін жанайтын ω шеңбері бар екені белгілі. ω_1 және ω_2 шеңберлерінің сыртқы ортақ жанамалары ω шеңберінің үстінде қиылысатынын дәлелде.

Жұмыс уақыты: 4 сағат 30 минут
Әрбір есеп 7 ұпайға бағаланады