

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

ថ្ងៃ ពុធ ទី ១៦ កក្កដា ២០០៨

**លំហាត់ ១:** គេអោយ  $ABC$  ជាត្រីកោណដែលមុំទាំងអស់ជាមុំស្រួច  $H$  ជាអរតូសង់ ។ រង្វង់កាត់តាម  $H$  មានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ  $BC$  រង្វង់នេះប្រសព្វនឹង  $BC$  ត្រង់  $A_1$  និង  $A_2$  ។ ដូចគ្នានេះដែរ រង្វង់កាត់តាម  $H$  មានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ  $CA$  ហើយរង្វង់នេះប្រសព្វនឹង  $CA$  ត្រង់  $B_1$  និង  $B_2$  រង្វង់មួយទៀតកាត់តាម  $H$  ដដែលមានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ  $AB$  រង្វង់នេះប្រសព្វនឹង  $AB$  ត្រង់  $C_1$  និង  $C_2$  ។ បង្ហាញថាចំនុច  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

**លំហាត់ ២:** (ក) បង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x, y, z$  ដែលចំនួននិមួយៗខុសពី 1 ហើយផ្សេងផ្ទាត់  $xyz = 1$

(ខ) បង្ហាញថាវិសមភាពខាងលើនេះទៅជាសមភាព ចំពោះត្រីធាតុ  $x, y, z$  ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល  $x, y, z$  ជាចំនួនសនិទានខុសពី 1 និង ផ្សេងផ្ទាត់  $xyz = 1$  ។

**លំហាត់ ៣:** បង្ហាញថាមានចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល  $n^2 + 1$  មានតួចែក ជាចំនួនបឋមដែលធំជាង  $2n + \sqrt{2n}$  ។

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

ថ្ងៃ ព្រហស្បតិ៍ ទី ១៧ កក្កដា ២០០៨

**លំហាត់ ៤:** រកគ្រប់អនុវត្តន៍  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  (មានន័យថា  $f$  ជាអនុវត្តន៍ពីចំនួនពិតវិជ្ជមានទៅចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ដែល

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $w, x, y, z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $wx = yz$  ។

**លំហាត់ ៥:** គេអោយ  $n$  និង  $k$  ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយ  $k \geq n$  និង  $k - n$  ជាចំនួនគូ។ គេមានអំពូលចំនួន  $2n$  ដែលដាក់លេខ  $1, 2, \dots, 2n$  អំពូលនិមួយៗនៃអំពូលទាំងនោះអាច **បើក** រឺ **បិទ** ។ ដំបូង អំពូលទាំងអស់បិទ។ យើងពិនិត្យ ស្លឹកនៃជំហានៈ នៅជំហាននិមួយៗ អំពូលមួយនៃអំពូលទាំងនោះត្រូវបានចុចប្តូរ (ចុចប្តូរពីបើកទៅបិទ រឺ ចុចប្តូរពីបិទទៅបើក) ។

តារាង  $N$  ជាចំនួននៃស្លឹកនេះ ដែលមាន  $k$  ជំហាន ហើយធ្វើអោយមានស្ថានភាព ដែលអំពូលពី 1 ទៅ  $n$  ទាំងអស់បើក និង អំពូល  $n+1$  ទៅ  $2n$  ទាំងអស់បិទ។

តារាង  $M$  ជាចំនួននៃស្លឹកនេះ ដែលមាន  $k$  ជំហាន ធ្វើអោយមានស្ថានភាព ដែលអំពូលពី 1 ទៅ  $n$  ទាំងអស់បើក និង អំពូល  $n+1$  ទៅ  $2n$  ទាំងអស់បិទ ប៉ុន្តែគ្មានអំពូលពី  $n+1$  ទៅ  $2n$  ធ្លាប់បានបើកទេ។

កំណត់អត្រា  $N / M$  ។

**លំហាត់ ៦:** គេអោយ  $ABCD$  ជាចតុកោណប៉ោង ដែល  $|BA| \neq |BC|$  ។ តារាង  $\omega_1$  និង  $\omega_2$  ជារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  និង  $ADC$  រៀងគ្នា។ ឧបមាថា មានរង្វង់  $\omega$  ប៉ះនឹងកន្លះបន្ទាត់  $BA$  បន្ទាយចេញពី  $A$  និងប៉ះកន្លះបន្ទាត់  $BC$  បន្ទាយចេញពី  $C$  ដែលរង្វង់នេះក៏ប៉ះនឹងបន្ទាត់  $AD$  និង  $CD$  ដែរ។

បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះរួមខាងក្រៅទាំងសងខាងនឹងរង្វង់  $\omega_1$  និង រង្វង់  $\omega_2$  ប្រសព្វគ្នាលើរង្វង់  $\omega$  ។