49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 년 7 월 16 일, 수요일

문제 1. 예각삼각형 ABC 의 수심을 H 라고 하자. 점 H 를 지나고 중심이 변 BC 의 중점인 원이 직선 BC 와 두 점 A_1, A_2 에서 만난다. 마찬가지로, 점 H 를 지나고 중심이 변 CA 의 중점인 원이 직선 CA 와 두 점 B_1, B_2 에서 만나고, 점 H 를 지나고 중심이 변 AB 의 중점인 원이 직선 AB 와 두 점 C_1, C_2 에서 만난다. 이때, 점 A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 가 모두 한 원 위에 있음을 보여라.

문제 2. (a) 조건 $xyz = 1$ 을 만족시키는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 다음의 부등식을 증명하여라 (단, $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$):

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 .$$

(b) 위에서 등호를 만족시키는 $xyz = 1$ 인 유리수의 세쌍 (x, y, z) 가 무한히 많음을 보여라. 단, $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$ 이다.

문제 3. 다음의 조건을 만족시키는 양의 정수 n 이 무한히 많음을 보여라: $n^2 + 1$ 이 $2n + \sqrt{2n}$ 보다 큰 소수를 약수로 가진다.

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점

Language: **Korean** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 년 7 월 17 일, 목요일

문제 4. 다음의 조건을 만족시키는 함수 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 를 모두 구하여라 (f 는 임의의 양의 실수에 양의 실수를 대응시키는 함수): $wx=yz$ 인 모든 양의 실수 w,x,y,z 에 대하여

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}.$$

문제 5. 주어진 두 양의 정수 n 과 k 에 대하여 $k\geq n$ 이고, $k-n$ 은 짝수라고 하자. 이제 1번부터 $2n$번까지 번호가 붙은 $2n$ 개의 램프를 생각하자. 각각의 램프에는 켜짐/꺼짐 스위치가 부착되어 있고, 처음에는 모든 램프가 꺼진 상태이다. 하나의 램프를 택하여 스위치의 상태를 (꺼짐에서 켜짐으로 혹은 켜짐에서 꺼짐으로) 바꾸는 것을 작동이라 정의하고, k 회의 연속한 작동을 k-작동이라 부르자.
처음의 상태에서 시작하여, 1번부터 n번까지의 램프는 모두 켜지고 $(n+1)$번부터 $2n$번까지의 램프는 모두 꺼지도록 하는 k-작동의 개수를 N 이라 하고, 결과는 같으면서 $(n+1)$번부터 $2n$번까지의 램프는 한번도 켜지 않는 k-작동의 개수를 M 이라 하자. 이때, N/M 의 값을 구하여라.

문제 6. 볼록사각형 $ABCD$ 에 대하여 $BA\neq BC$ 이다. 삼각형 ABC 와 ADC 의 내접원을 각각 ω_1 과 ω_2 라 하자. 반직선 BA 에서 선분 BA 를 제외한 부분과 반직선 BC 에서 선분 BC 를 제외한 부분에 접하면서 동시에 직선 AD 와 CD 에 접하는 원 ω 가 존재한다고 할 때, 원 ω_1 과 ω_2 의 두 공통외접선의 교점이 원 ω 위에 있음을 보여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문항당 7 점