49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 년 7 월 16 일, 수요일

문제 1. 뾰족 $\triangle ABC$ 의 수심을 H 라고 하자. BC 의 가운데 점을 중심으로 하고 H 를 지나는 원둘레가 직선 BC 와 A_1, A_2 에서 사귄다. 마찬가지로 CA 의 가운데 점을 중심으로 하고 H 를 지나는 원둘레가 직선 CA 와 B_1, B_2 에서 사귀며 AB 의 가운데 점을 중심으로 하고 H 를 지나는 원둘레가 직선 AB 와 C_1, C_2 에서 사귄다. 이때 점 A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 이 한 원둘레 우에 놓인다는 것을 증명하여라.

문제 2. (a) 매개가 1 이 아니고 $xyz = 1$ 을 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 부등식

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

이 선다는 것을 증명하여라.

(b) 매개가 1 이 아니고 $xyz = 1$ 을 만족하는 무한히 많은 세 유리수 조 (x, y, z) 에 대하여 우의 부등식이 등식으로 된다는 것을 증명하여라.

문제 3. 무한히 많은 자연수 n 에 대하여 $n^2 + 1$ 이 $2n + \sqrt{2n}$ 보다 큰 씨인수를 가진다는 것을 증명하여라.

제한시간: 4 시간 30 분
문제당 7 점

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 년 7 월 17 일, 목요일

문제 4. $wx = yz$ 인 모든 정의 실수 w, x, y, z 에 대하여

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

을 만족하는 모든 함수 $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$(즉, f 는 정의 실수 모임을 정의 실수 모임으로 넘기는 함수)를 구하여라.

문제 5. n 과 k 가 자연수들로서 $k \geq n$ 이고 $k - n$ 이 짝수라고 하자. 번호가 $1, 2, \ldots, 2n$ 인 $2n$ 개의 전등들이 있는데 매 전등은 불을 켜거나 끌 수 있다. 처음에 모든 전등들은 꺼져 있다. 한번의 조작은 임의로 한 전등을 잡아 그 상태를 변화시키는 것이다. (꺼져 있으면 켜고 켜져 있으면 끈다.) 이제 k 번의 련속적인 조작을 k-조작이라고 부르자.
처음 상태에서 시작하여, 1번부터 n번까지의 전등은 모두 켜지고 $(n+1)$번부터 $2n$번까지의 전등은 모두 꺼지도록 하는 k-조작의 개수를 N 이라고 하고, 결과는 같으면서 $(n+1)$번부터 $2n$번까지의 전등은 한번도 켜지 않는 k-조작의 개수를 M 이라고 하자. 이때, N/M 의 값을 구하여라.

문제 6. $ABCD$ 가 $BA \neq BC$ 인 볼록사각형이라고 하자. $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADC$ 의 내접원들을 각각 ω_1, ω_2 로 표시하자. 이제 네 개의 반직선 즉 선분 BA 의 A 쪽으로의 연장선과 선분 BC 의 C 쪽으로의 연장선, 그리고 반직선 AD 와 반직선 CD 의 모두와 접하는 원둘레 ω 가 존재한다고 하자. 이때 원둘레 ω_1 과 ω_2 의 공통외접선들은 원둘레 ω 우에서 사귄다는 것을 증명하여라. (여기서 ω_1 과 ω_2 의 공통외접선은 그것에 관하여 ω_1 과 ω_2 이 같은 쪽에 있는 공통접선을 말한다.)

제한시간: 4 시간 30 분
문제당 7 점