# 49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
# MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

*Trečiadienis, liepos 16 d., 2008*

**Uždavinys 1.** Tegul $H$ yra smailiojo trikampio $ABC$ aukštinių susikirtimo taškas. Apskritimas, kurio centras yra atkarpos $BC$ vidurio taškas, eina per tašką $H$ ir kerta tiesę $BC$ taškuose $A_1$ ir $A_2$. Analogiškai, apskritimas, kurio centras yra atkarpos $CA$ vidurio taškas, eina per tašką $H$ ir kerta tiesę $CA$ taškuose $B_1$ ir $B_2$, o apskritimas, kurio centras yra atkarpos $AB$ vidurio taškas, eina per tašką $H$ ir kerta tiesę $AB$ taškuose $C_1$ ir $C_2$. Įrodykite, kad taškai $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ priklauso vienam apskritimui.

**Uždavinys 2.** $(a)$ Įrodykite, kad jei $x, y, z$ yra tokie realieji skaičiai, kad $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ ir $xyz = 1$, tai

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

$(b)$ Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug racionaliųjų skaičių trejetų $x, y, z$, tenkinančių sąlygas $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ ir $xyz = 1$, su kuriais ši nelygybė virsta lygybe.

**Uždavinys 3.** Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių $n$, su kuriais $n^2 + 1$ turi pirminį daliklį, kuris yra didesnis už $2n + \sqrt{2n}$.



*Darbui skirtas laikas:* 4 *valandos ir* 30 *minučių*
*Kiekvienas uždavinys bus vertinamas* 7 *taškais*

# 49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
# MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

*Ketvirtadienis, liepos 17 d., 2008*

**Uždavinys 4.** Raskite visas tokias funkcijas $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (t.y. $f$ yra funkcija, kuri kiekvienam teigiamam realiąjam skaičiui priskiria teigiamą realųjį skaičių), kad

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

su visais teigiamais realiaisiais skaičiais $w$, $x$, $y$, $z$, tenkinančiais sąlygą $wx = yz$.

**Uždavinys 5.** Tegul $n$ ir $k$ yra tokie natūralieji skaičiai, kad $k - n$ yra lyginis skaičius ir $k \geq n$. Yra $2n$ lempučių sunumeruotų skaičiais $1, 2, \ldots, 2n$. Kiekviena iš lempučių yra *įjungta* arba *išjungta*. Pradžioje visos lemputės yra išjungtos. Nagrinėsime sekas, susidedancias iš keleto *žingsnių*: kiekvienu žingsniu viena iš lempučių yra perjungiama (arba išjungta lemputė yra įjungiama, arba įjungta lemputė yra išjungiama).

Sakykime, kad yra $N$ sekų, sudarytų iš $k$ žingsnių, kurios baigiasi tokioje padėtyje, kai lemputės $1, \ldots, n$ yra įjungtos, o lemputės $n + 1, \ldots, 2n$ – išjungtos.

Analogiškai, sakykime, kad yra $M$ sekų, sudarytų iš $k$ žingsnių, kurios baigiasi tokioje pačioje padėtyje, t.y., kai lemputės $1, \ldots, n$ yra įjungtos, o lemputės $n + 1, \ldots, 2n$ – išjungtos, tačiau nei viename žingsnyje nei viena iš lempučių $n + 1, \ldots, 2n$ nebuvo įjungta.

Raskite santykį $N/M$.

**Uždavinys 6.** Tegul $ABCD$ yra iškilasis keturkampis, $|BA| \neq |BC|$, o $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra apskritimai, įbrėžti, atitinkamai, į trikampius $ABC$ ir $ADC$. Yra žinoma, kad egzistuoja apskritimas $\omega$, kuris liečia spindulį $BA$ atkarpos $BA$ tęsinyje už taško $A$, liečia spindulį $BC$ atkarpos $BC$ tęsinyje už taško $C$ ir liečia tieses $AD$ ir $CD$. Įrodykite, kad abi bendros apskritimų $\omega_1$ ir $\omega_2$ išorinės liestinės kertasi taške, kuris priklauso apskritimui $\omega$.



*Darbui skirtas laikas: 4 valandos ir 30 minučių*
*Kiekvienas uždavinys bus vertinamas 7 taškais*