# 49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
# MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

*Среда, 16-ти Јули, 2008*

**Задача 1.** Нека $H$ е пресекот на висините во остроаголен триаголник $ABC$. Кружницата со центар во средината на страната $BC$ и која што минува низ точката $H$ ја сече правата $BC$ во точките $A_1$ и $A_2$. Слично, кружницата со центар во средината на страната $CA$ и која што минува низ точката $H$ ја сече правата $CA$ во точките $B_1$ и $B_2$, и кружницата со центар во средината на страната $AB$ и која што минува низ точката $H$ ја сече правата $AB$ во точките $C_1$ и $C_2$. Докажи дека точките $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ припаѓаат на една кружница.

**Задача 2.** (a) Докажи дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

важи за сите реални броеви $x, y, z$, такви да $x\neq 1$, $y\neq 1$, $z\neq 1$ и $xyz=1$.

(b) Докажи дека, во (a) важи еднаквост за бесконечно многу тројки од рационални броеви $x, y, z$, такви да $x\neq 1$, $y\neq 1$, $z\neq 1$ и $xyz=1$.

**Задача 3.** Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви $n$ такви да бројот $n^2+1$ има прост делител кој што е поголем од $2n+\sqrt{2n}$.



*Време за работа: 4 часа и 30 минути*
*Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода.*

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

*Четврток, 17-ти Јули, 2008*

**Задача 4.** Најди ги сите функции $f : (0,\infty) \to (0, \infty)$ (т.е. $f$ е функција од множеството на позитивни реални броеви во множеството на позитивни реални броеви) такви да

$$\frac{\left(f(w)\right)^2+\left(f(x)\right)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

важи за сите позитивни реални броеви $w$, $x$, $y$, $z$, кои ја задоволуваат еднаквоста $wx = yz$.

**Задача 5.** Нека $n$ и $k$ се природни броеви такви да $k \geq n$ и $k - n$ е парен број. Дадени се $2n$ лампи, означени со броевите 1, 2, … , $2n$. Секоја од лампите може да се наоѓа во една од следните две состојби: *вклучена* или *исклучена*. На почетокот сите лампи се исклучени. Разгледуваме низи од *чекори*: во секој чекор точно една од лампите ја менува својата состојба (ако била вклучена се исклучува или ако била исклучена се вклучува).
Нека $N$ е бројот на такви низи од $k$ чекори така да се добива следната ситуација: сите лампи означени со броевите од 1 до $n$ се вклучени, а сите лампи означени со броевите од $n + 1$ до $2n$ се исклучени.
Нека $M$ е бројот на такви низи од $k$ чекори така да се добива следната ситуација: сите лампи означени со броевите од 1 до $n$ се вклучени, а сите лампи означени со броевите од $n + 1$ до $2n$ се исклучени, но притоа ниту една од лампите означени со броевите од $n + 1$ до $2n$ не ја менувала својата состојба.
Одреди ја вредноста на односот $N/M$.

**Задача 6.** Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков да $|BA| \neq |BC|$. Нека $\omega_1$ и $\omega_2$ се впишаните кружници во триголниците $ABC$ и $ADC$, соодветно. Да претпоставиме дека постои кружница $\omega$ која што ги допира полуправата $BA$ во точка после $A$ и полуправата $BC$ во точка после $C$, и која што, исто така, ги допира и правите $AD$ и $CD$. Докажи дека заедничките надворешни тангенти на $\omega_1$ и $\omega_2$ се сечат на $\omega$.


*Време за работа: 4 часа и 30 минути*
*Секоја точно решена задача се вреднува со 7 бода*