# 49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
# MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

*Rabu, 16 Julai 2008*

**Soalan 1.** Suatu segitiga bersudut tirus $ABC$ mempunyai pusat ortogon $H$. Bulatan yang melalui $H$ dan berpusat di titik tengah $BC$ memotong garisan $BC$ pada titik $A_1$ dan $A_2$. Bulatan yang melalui $H$ dan berpusat di titik tengah $CA$ memotong garisan $CA$ pada titik $B_1$ dan $B_2$, dan bulatan yang melalui $H$ dan berpusat di titik tengah $AB$ memotong garisan $AB$ pada titik $C_1$ dan $C_2$. Buktikan bahawa titik $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ terletak di atas suatu bulatan.

**Soalan 2.** (a) Buktikan bahawa

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

untuk semua nombor nyata $x$, $y$, $z$, masing-masing berbeza daripada 1, dan memenuhi syarat $xyz = 1$.

(b) Buktikan bahawa kesamaan berlaku untuk tak terhingga banyaknya himpunan tiga nombor nisbah $x$, $y$, $z$, masing-masing berbeza daripada 1, dan memenuhi syarat $xyz = 1$.

**Soalan 3.** Buktikan bahawa wujud tak terhingga banyaknya integer positif $n$ sehinggakan $n^2 + 1$ mempunyai pembahagi perdana yang lebih besar daripada $2n + \sqrt{2n}$.



*Masa: 4 jam 30 minit*
*Setiap soalan bernilai 7 markah*

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

*Khamis, 17 Julai 2008*

**Soalan 4.** Cari semua fungsi $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (iaitu, $f$ ialah fungsi daripada nombor nyata positif kepada nombor nyata positif) sehinggakan

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

untuk semua nombor nyata positif $w$, $x$, $y$, $z$ yang memenuhi syarat $wx = yz$.

**Soalan 5.** Katakan $n$ dan $k$ integer positif supaya $k \geq n$ dan $k - n$ genap. Diberi $2n$ lampu yang dilabelkan $1, 2, \ldots, 2n$, dan setiap lampu berkeadaan sama ada *buka* atau *tutup*. Pada awalnya, semua lampu berkeadaan tutup. Pertimbangkan jujukan yang terdiri daripada beberapa *langkah*: pada setiap langkah, salah satu daripada lampu tersebut diubah keadaannya (daripada buka kepada tutup atau daripada tutup kepada buka).

Katakan $N$ ialah bilangan jujukan yang terdiri daripada $k$ langkah dan berakhir dengan keadaan lampu 1 hingga $n$ semuanya buka, dan lampu $n + 1$ hingga $2n$ semuanya tutup.

Katakan $M$ ialah bilangan jujukan yang terdiri daripada $k$ langkah, berakhir dengan keadaan lampu 1 hingga $n$ semuanya buka, dan lampu $n + 1$ hingga $2n$ semuanya tutup, tetapi semua lampu $n + 1$ hingga $2n$ tidak pernah berkeadaan buka.

Tentukan nisbah $N/M$.

**Soalan 6.** Katakan $ABCD$ suatu segiempat cembung dengan $|BA| \neq |BC|$. Lambangkan bulatan dalam bagi segitiga $ABC$ dan $ADC$ dengan masing-masing $\omega_1$ dan $\omega_2$. Andaikan wujud suatu bulatan $\omega$ tangen kepada sinar $BA$ melepasi $A$ dan kepada sinar $BC$ melepasi $C$, dan juga tangen kepada garisan $AD$ dan $CD$. Buktikan bahawa tangen luar sepunya bagi $\omega_1$ dan $\omega_2$ bertemu pada $\omega$.



*Masa: 4 jam 30 minit*
*Setiap soalan bernilai 7 markah*