Language: **Norwegian** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Onsdag 16. juli 2008

Oppgave 1. La ABC være en spissvinklet trekant med høydepunkt H. Sirkelen gjennom H med sentrum i BCs midtpunkt skjærer linjen BC i punktene A_1 og A_2. På samme måte skjærer sirkelen gjennom H med sentrum i CAs midtpunkt linjen CA i B_1 og B_2, mens sirkelen gjennom H med sentrum i ABs midtpunkt skjærer linjen AB i C_1 og C_2. Vis at punktene A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 og C_2 ligger på en sirkel.

Oppgave 2. **(a)** Vis at følgende ulikhet gjelder for alle reelle tall x, y og z forskjellige fra 1 som tilfredsstiller $xyz = 1$:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$$

(b) Vis at det finnes uendelig mange tripler av rasjonale tall x, y og z forskjellige fra 1 som tilfredsstiller $xyz = 1$ slik at det står likhet i ulikheten ovenfor.

Oppgave 3. Vis at det finnes uendelig mange positive heltall n slik at $n^2 + 1$ har en primfaktor større enn $2n + \sqrt{2n}$.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Torsdag 17.juli 2008

Oppgave 4. Finn alle funksjoner $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (dvs. at f er en funksjon fra de positive reelle tallene til de positive reelle tallene) slik at

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

for alle reelle $w, x, y, z > 0$ som tilfredsstiller $wx = yz$.

Oppgave 5. La n og k være positive heltall slik at $k \geq n$ og $k - n$ er jevn. La det være gitt $2n$ lamper (nummerert $1, 2, \ldots, 2n$) med to mulige stillinger hver: *tent* eller *slukket*. Til å begynne med er alle lampene slukket. Vi betrakter følger av *trekk*: i hvert trekk tenner vi enten én lampe som var slukket, eller slukker én lampe som var tent.
La N være antall slike følger bestående av k trekk og som resulterer i at lampene 1 til n er tent, mens lampene $n+1$ til $2n$ er slukket.
La M være antall slike følger bestående av k trekk og som resulterer i at lampene 1 til n er tent, mens lampene $n+1$ til $2n$ er slukket, men der ingen av lampene $n+1$ til $2n$ tennes underveis.
Bestem forholdet N/M.

Oppgave 6. La $ABCD$ være en konveks firkant med $AB \neq BC$. La ω_1 og ω_2 betegne henholdsvis ABCs og ADCs innskrevne sirkel. Anta at det finnes en sirkel ω som tangerer halvlinjen BA bortenfor A og halvlinjen BC bortenfor C, og som samtidig tangerer linjene AD og CD. Vis at de felles ytre tangentene til ω_1 og ω_2 skjærer hverandre i et punkt på ω.

Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng