

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD  
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

چهارشنبه، ۱۶ جولای ۲۰۰۸ به نام او

مساله ۱. در مثلث حاده الزاویه  $ABC$ ، مرکز ارتفاعی است. دایره‌ی گذرنده از  $H$  به مرکز وسط پاره خط  $BC$ ، خط  $BC$  را در  $A_1$  و  $A_2$  قطع می‌کند. به طور مشابه دایره‌ی گذرنده از  $H$  به مرکز وسط پاره خط  $AC$ ، خط  $AC$  را در  $B_1$  و  $B_2$  قطع می‌کند و دایره‌ی گذرنده از  $H$  به مرکز وسط پاره خط  $AB$ ، خط  $AB$  را در  $C_1$  و  $C_2$  قطع می‌کند. نشان دهید  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  روی یک دایره هستند.

مساله ۲. الف) نشان دهید نامساوی  $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$  برای هر سه عدد حقیقی  $x, y, z$  مخالف یک و با شرط  $xyz = 1$  برقرار است.

ب) نشان دهید تساوی برای بینهایت سه تایی  $x, y, z$  از اعداد گویای مخالف یک با شرط  $xyz = 1$  رخ می‌دهد.

مساله ۳. نشان دهید تعداد اعداد طبیعی مانند  $n$  به طوری که  $n^2 + 1$  عامل اولی بزرگتر از  $2n + \sqrt{2n}$  دارد نامتناهی است.

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

پنج شنبه، ۱۷ جولای ۲۰۰۸ به نام او

**مساله ۴.** تمام توابع  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  را بیاید به طوری که برای هر  $w, x, y, z$  مثبت با شرط  $wx = yz$  داشته باشیم

$$\frac{f(w)^x + f(x)^x}{f(y)^x + f(z)^x} = \frac{w^x + x^x}{y^x + z^x}$$

**مساله ۵.** دو عدد طبیعی  $n$  و  $k$  با زوجیت یکسان و شرط  $k \geq n$  داده شده اند. فرض کنید  $2n$  لامپ با شماره های  $1, 2, \dots, 2n$  داریم که هر کدام می توانند روشن یا خاموش باشند و در ابتدا همه لامپ ها خاموش هستند. منظور از دنباله، دنباله ای متشکل از چند مرحله است که در هر مرحله دقیقاً یکی از لامپ ها را تغییر وضعیت می دهیم (از روشن به خاموش یا از خاموش به روشن).

$N$  را تعداد دنباله های  $k$  مرحله ای بگیریید که پس از انجام آن  $k$  مرحله، وضعیت لامپ های  $1$  تا  $n$  روشن و وضعیت لامپ های  $n+1$  تا  $2n$  خاموش باشد. متناظراً  $M$  را تعداد دنباله های  $k$  مرحله ای بگیریید که پس از انجام آن  $k$  مرحله، وضعیت لامپ های  $1$  تا  $n$  روشن و وضعیت لامپ های  $n+1$  تا  $2n$  خاموش باشد با این محدودیت که وضعیت لامپ های  $n+1$  تا  $2n$  را در هیچ مرحله ای تغییر ندهیم. حاصل  $\frac{N}{M}$  را بیابید.

**مساله ۶.** فرض کنید  $ABCD$  یک چهار ضلعی محدب با شرط  $AB \neq BC$  باشد. دایره های محاطی مثلث های  $ABC$  و  $ADC$  را به ترتیب با  $\omega_1$  و  $\omega_2$  نشان می دهیم. فرض کنید دایره  $\omega$  وجود داشته باشد به طوری که بر امتداد  $BA$  از طرف  $A$  و بر امتداد  $BC$  از طرف  $C$  مماس باشد و همچنین بر خطوط  $AD$  و  $CD$  نیز مماس باشد. ثابت کنید مماس های خارجی مشترک دو دایره  $\omega_1$  و  $\omega_2$  با یکدیگر روی  $\omega$  برخورد می کنند.