49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Środa, 16 lipca, 2008

Zadanie 1. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Okrąg, którego środkiem jest środek odcinka BC i który przechodzi przez punkt H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie okrąg, którego środkiem jest środek odcinka CA i który przechodzi przez punkt H przecina prostą CA w punktach B_1 i B_2, zaś okrąg, którego środkiem jest środek odcinka AB i który przechodzi przez punkt H przecina prostą AB w punktach C_1 i C_2.
Udowodnić, że punkty A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.

Zadanie 2. (a) Udowodnić, że jeśli $xyz = 1$ i żadna z liczb rzeczywistych x, y, z nie jest równa 1, to spełniona jest nierówność:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \,. \qquad (N)$$

(b) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb wymiernych x, y, z, każda z których jest różna od 1, dla których spełniona jest równość $xyz = 1$ i dla których nierówność (N) staje się równością.

Zadanie 3. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $n^2 + 1$ ma dzielnik pierwszy większy niż $2n + \sqrt{2n}$.

Czas na rozwiązanie zadań: 4 godziny i 30 minut.
Każde zadanie jest warte 7 punktów.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Czwartek, 17 lipca, 2008

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ (czyli funkcje określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, których wartościami są wyłącznie dodatnie liczby rzeczywiste), że równość

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

zachodzi dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych w, x, y, z spełniających warunek $wx = yz$.

Zadanie 5. Niech n i k będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $k \geq n$ oraz $k-n$ jest liczbą parzystą. Danych jest $2n$ lamp oznaczonych liczbami $1, 2, \ldots, 2n$. Każda z nich może być włączona lub wyłączona. W chwili początkowej wszystkie są wyłączone. Rozpatrujemy ciągi przełączeń: za każdym razem dokładnie jedna lampa jest przełączana, tzn. włączona jest wyłączana, a wyłączona — włączana.

Niech N będzie liczbą ciągów złożonych z k przełączeń takich, że po tych k przełączeniach wszystkie lampy oznaczone liczbami od 1 do n są włączone, a wszystkie lampy oznaczone liczbami od $n+1$ do $2n$ — wyłączone.

Niech M będzie liczbą takich ciągów złożonych z k przełączeń, że po tych k przełączeniach wszystkie lampy oznaczone liczbami od 1 do n są włączone, a wszystkie lampy oznaczone liczbami od $n+1$ do $2n$ — wyłączone przy czym ani jedna z lamp oznaczonych liczbami od $n+1$ do $2n$ nie była przełączana.

Znaleźć stosunek N/M.

Zadanie 6. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $|BA| \neq |BC|$. Oznaczmy okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC odpowiednio symbolami ω_1 i ω_2. Załóżmy, że istnieje okrąg ω styczny: do półprostej $BA^{\rightarrow}$ w punkcie leżącym poza odcinkiem BA, do półprostej $BC^{\rightarrow}$ w punkcie leżącym poza odcinkiem BC i który jest też styczny do prostych AD i CD. Udowodnić, że punkt przecięcia wspólnych stycznych zewnętrznych do okręgów ω_1 i ω_2 leży na okręgu ω.

Czas na rozwiązanie zadań: 4 godziny i 30 minut.
Każde zadanie jest warte 7 punktów.