Language: **Slovak** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Streda, 16. júl 2008

Úloha 1. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok. Kružnica so stredom v strede strany BC prechádzajúca bodom H pretína priamku BC v bodoch A_1 a A_2. Podobne kružnica so stredom v strede strany CA predchádzajúca bodom H pretína priamku CA v bodoch B_1 a B_2 a kružnica so stredom v strede strany AB predchádzajúca bodom H pretína priamku AB v bodoch C_1 a C_2. Dokážte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ležia na jednej kružnici.

Úloha 2. (a) Dokážte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

pre všetky reálne čísla x, y, z rôzne od 1 spĺňajúce $xyz = 1$.

(b) Dokážte, že v uvedenej nerovnosti platí rovnosť pre nekonečne veľa trojíc racionálnych čísel x, y, z rôznych od 1 spĺňajúcich $xyz = 1$.

Úloha 3. Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že $n^2 + 1$ má prvočíselného deliteľa väčšieho ako $2n + \sqrt{2n}$.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Štvrtok, 17. júl 2008

Úloha 4. Nájdite všetky funkcie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (t. j. funkcie z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel) také, že

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pre všetky kladné reálne čísla w, x, y, z spĺňajúce $wx = yz$.

Úloha 5. Nech n a k sú kladné celé čísla, kde $k \geq n$ a $k - n$ je párne číslo. Daných je $2n$ lámp označených $1, 2, \ldots, 2n$, pričom každá z nich môže byť buď *zapnutá* alebo *vypnutá*. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. Uvažujeme postupnosti *krokov*: v každom kroku jednu z lámp prepneme (zo zapnutej na vypnutú alebo z vypnutej na zapnutú).

Nech N je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n + 1$ po $2n$ sú vypnuté.

Nech M je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n + 1$ po $2n$ sú vypnuté, pričom žiadna z lámp od $n + 1$ po $2n$ nebola nikdy zapnutá.

Určte podiel N/M.

Úloha 6. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom $|BA| \neq |BC|$. Označme postupne ω_1 a ω_2 kružnice vpísané do trojuholníkov ABC a ADC. Predpokladajme, že existuje kružnica ω dotýkajúca sa polpriamky BA za bodom A a polpriamky BC za bodom C, ktorá sa dotýka aj priamok AD a CD. Dokážte, že spoločné vonkajšie dotyčnice kružníc ω_1 a ω_2 sa pretínajú na kružnici ω.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov.