49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

sreda, 16. julij 2008

Naloga 1. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice BC, ki gre skozi točko H, seka premico BC v točkah A_1 in A_2. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice CA, ki gre skozi točko H, seka premico CA v točkah B_1 in B_2. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice AB, ki gre skozi točko H, seka premico AB v točkah C_1 in C_2. Dokaži, da ležijo točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2 na isti krožnici.

Naloga 2. (a) Dokaži, da velja neenakost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

za vsa realna števila x, y, z, ki so različna od 1 in za katera velja $xyz=1$.

(b) Dokaži, da v zgornji neenakosti velja enakost za neskončno mnogo trojic racionalnih števil x, y, z, ki so različna od 1 in za katera velja $xyz=1$.

Naloga 3. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo takih naravnih števil n, za katera je število n^2+1 deljivo s praštevilom, ki je večje od $2n+\sqrt{2n}$.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

četrtek, 17. julij 2008

Naloga 4. Poišči vse take funkcije $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ (torej, f je funkcija, ki slika iz pozitivnih realnih števil v pozitivna realna števila), za katere velja

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

za vsa pozitivna realna števila w, x, y, z z lastnostjo $wx=yz$.

Naloga 5. Naj bosta n in k naravni števili z lastnostjo $k\geq n$ in $k-n$ je sodo število. Danih je $2n$ luči, ki so oštevilčene z $1, 2, \ldots, 2n$. Vsaka izmed luči je lahko bodisi prižgana bodisi ugasnjena. Obravnavajmo zaporedja *korakov*: v vsakem koraku pritisnemo na stikalo natanko ene izmed luči (če je luč prižgana, se ugasne, če je luč ugasnjena, se prižge). Na začetku so vse luči ugasnjene.

Naj bo N število takih zaporedij s k koraki, pri katerih so na koncu vse luči od 1 do n prižgane, vse luči od $n+1$ do $2n$ pa ugasnjene.

Naj bo M število takih zaporedij s k koraki, pri katerih so na koncu vse luči od 1 do n prižgane, vse luči od $n+1$ do $2n$ ugasnjene in nobena izmed luči od $n+1$ do $2n$ ni bila nikoli prižgana.

Določi razmerje N/M.

Naloga 6. Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$, v katerem je $|BA|\neq|BC|$. Trikotniku ABC včrtano krožnico označimo z ω_1, trikotniku ADC včrtano krožnico pa z ω_2. Denimo, da obstaja krožnica ω, ki se dotika poltraka BA naprej od A, poltraka BC naprej od C in ki se dotika tudi premic AD in CD. Dokaži, da se skupni zunanji tangenti krožnic ω_1 in ω_2 sekata na krožnici ω.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.