

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

วันพุธที่ ๑๖ กรกฎาคม ๒๕๕๑

**โจทย์ข้อที่ ๑** กำหนด  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมซึ่งมี  $H$  เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ วงกลมซึ่งผ่านจุด  $H$  และมีจุดกึ่งกลางด้าน  $BC$  เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง  $BC$  ที่จุด  $A_1$  และ  $A_2$  ในทำนองเดียวกัน วงกลมซึ่งผ่านจุด  $H$  และมีจุดกึ่งกลางด้าน  $CA$  เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง  $CA$  ที่จุด  $B_1$  และ  $B_2$  วงกลมซึ่งผ่านจุด  $H$  และมีจุดกึ่งกลางด้าน  $AB$  เป็นจุดศูนย์กลางตัดเส้นตรง  $AB$  ที่จุด  $C_1$  และ  $C_2$   
จงพิสูจน์ว่า  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  อยู่บนวงกลมเดียวกัน

**โจทย์ข้อที่ ๒** (a) จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

สำหรับทุกจำนวนจริง  $x, y, z$  ซึ่งแต่ละจำนวนมีค่าไม่เท่ากับ 1 และสอดคล้อง  $xyz = 1$

(b) จงแสดงว่าสมการจะเป็นสมการสำหรับชุดจำนวนตรรกยะ  $x, y, z$  มากมายเป็นจำนวนอนันต์ชุด ซึ่งแต่ละจำนวนมีค่าไม่เท่ากับ 1 และสอดคล้อง  $xyz = 1$

**โจทย์ข้อที่ ๓** จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็มบวก  $n$  มากมายเป็นจำนวนอนันต์ตัว ซึ่ง  $n^2 + 1$  มีตัวหารเฉพาะที่มีค่ามากกว่า  $2n + \sqrt{2n}$

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD**  
**MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

วันพฤหัสบดีที่ ๑๗ กรกฎาคม ๒๕๕๑

โจทย์ข้อที่ ๔ จงหาฟังก์ชัน  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  (นั่นคือ  $f$  เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงบวกไปยังเซตของจำนวนจริงบวก) ทั้งหมดที่ทำให้

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

สำหรับทุกจำนวนจริงบวก  $w, x, y, z$  ซึ่ง  $wx = yz$

โจทย์ข้อที่ ๕ ให้  $n$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง  $k \geq n$  และ  $k - n$  เป็นจำนวนคู่ มีหลอดไฟจำนวน  $2n$  ดวงซึ่งมีหมายเลข  $1, 2, \dots, 2n$  กำกับ หลอดไฟแต่ละดวงมีสถานะ ติด หรือ ดับ หลอดไฟทุกดวงเริ่มต้นด้วยสถานะดับ เราจะพิจารณาลำดับที่ประกอบด้วย การเปลี่ยนสถานะเป็นขั้น ๆ โดยในแต่ละขั้นต้องมีการเปลี่ยนสถานะหลอดไฟเพียงดวงเดียวเท่านั้น (จากติดเป็นดับ หรือ จากดับเป็นติด)

ให้  $N$  เป็นจำนวนลำดับทั้งหมด ซึ่งแต่ละลำดับประกอบด้วย การเปลี่ยนสถานะ  $k$  ขั้น และในสถานะสุดท้าย หลอดไฟดวงที่ 1 ถึงดวงที่  $n$  ติดหมด และหลอดไฟดวงที่  $n + 1$  ถึงดวงที่  $2n$  ดับหมด

ให้  $M$  เป็นจำนวนลำดับทั้งหมด ซึ่งแต่ละลำดับประกอบด้วย การเปลี่ยนสถานะ  $k$  ขั้น และในสถานะสุดท้าย หลอดไฟดวงที่ 1 ถึงดวงที่  $n$  ติดหมด และหลอดไฟดวงที่  $n + 1$  ถึงดวงที่  $2n$  ดับหมด โดยที่หลอดไฟดวงที่  $n + 1$  ถึงดวงที่  $2n$  ไม่เคยมีดวงใดเปลี่ยนสถานะเลย

จงหาอัตราส่วน  $N/M$

โจทย์ข้อที่ ๖ กำหนด  $ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี  $|BA| \neq |BC|$

ให้  $\omega_1$  และ  $\omega_2$  เป็นวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  และ  $ADC$  ตามลำดับ

สมมติว่ามีวงกลม  $\omega$  ซึ่งสัมผัสกับ  $BA$  ส่วนที่ต่อจากจุด  $A$  และสัมผัสกับ  $BC$  ส่วนที่ต่อจากจุด  $C$  และยังสัมผัสกับเส้นตรง  $AD$  และ  $CD$  ด้วย

จงพิสูจน์ว่าเส้นสัมผัสภายนอกของวงกลม  $\omega_1$  และ  $\omega_2$  ตัดกันบนวงกลม  $\omega$

Language: Thai

เวลา: ๔ ชั่วโมง ๓๐ นาที  
โจทย์แต่ละข้อมี ๗ คะแนน