Language: **Turkish** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Çarşamba, 16 Temmuz, 2008

Soru 1. Daraçılı ABC üçgeninin ortasantrı (yüksekliklerinin kesişim noktası) H olsun. Merkezi BC nin orta noktası olup H den geçen çember BC doğrusunu A_1 ve A_2 noktalarında kesiyor. Benzer şekilde, merkezi CA nin orta noktası olup H den geçen çember CA doğrusunu B_1 ve B_2 noktalarında ve merkezi AB nin orta noktası olup H den geçen çember AB doğrusunu C_1 ve C_2 noktalarında kesiyor. A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 noktalarının aynı çember üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

Soru 2. (a) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z gerçel sayıları için

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) Herbiri 1 den farklı olan ve $xyz = 1$ koşulunu sağlayan sonsuz tane x, y, z rasyonel sayı üçlüsü için yukarıdaki eşitsizliğin eşitliğe dönüştüğünü gösteriniz.

Soru 3. Sonsuz tane n doğal sayısı için n^2+1 sayısının $2n+\sqrt{2n}$ den büyük asal böleninin olduğunu kanıtlayınız.

Language: Turkish

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Perşembe, 17 Temmuz, 2008

Soru 4. $wx = yz$ olmak üzere, tüm w, x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

koşulunu sağlayan tüm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ (diğer deyişle f, pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı ve pozitif değerler alan bir fonksiyondur) fonksiyonlarını bulunuz.

Soru 5. n ve k pozitif tam sayı olmak üzere, $k \geq n$ ve $k - n$ çift sayıdır. $1, 2, \ldots, 2n$ sayılarıyla numaralandırılmış $2n$ tane lambanın herbiri *açık* veya *kapalı* durumda olabiliyor. Başlangıçta lambaların hepsi kapalı durumdadır. Her hamlesinde bir lamba seçilerek, seçilen lambanın durumunu değiştiren (açıktan kapalıya veya kapalıdan açığa) *hamleler* dizileri tanımlayalım.

Sonucunda 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren tüm hamleler dizilerinin sayısı N olsun.

Sonucunda yine 1 den n ye kadar olan lambaları açık ve $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambaları kapalı duruma getiren ve k hamle içeren, fakat $n + 1$ den $2n$ ye kadar olan lambalarla hiç hamle yapmayan tüm hamleler dizilerinin sayısı M olsun.

N/M oranının değerini bulunuz.

Soru 6. $|BA| \neq |BC|$ olmak üzere, $ABCD$ bir konveks dörtgen olsun. ABC ve ADC üçgenlerinin içteğet çemberleri sırasıyla ω_1 ve ω_2 olsun. BA ışınınına A dan sonraki bir noktada ve BC ışınınına C den sonraki bir noktada teğet olan ve aynı zamanda AD ve CD doğrularına da teğet olan bir ω çemberinin olduğunu varsayalım. ω_1 ve ω_2 çemberlerinin ortak dış teğetlerinin ω çemberi üzerinde kesiştiğini kanıtlayınız.

Süre: 4 saat 30 dakika
Her soru 7 puan değerindedir