49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Середа, 16 липня 2008 р.

Задача 1. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Коло з центром у середині сторони BC проходить через точку H та перетинає пряму BC у точках A_1 та A_2. Аналогічно, коло з центром у середині строни CA проходить через точку H та перетинає пряму CA у точках B_1 та B_2, коло з центром у середині сторони AB проходить через точку H та перетинає пряму AB у точках C_1 та C_2. Доведіть, що точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежать на одному колі.

Задача 2. (a) Доведіть, що нерівність

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$$

виконується для усіх відмінних від 1 дійсних чисел x, y, z таких, що $xyz=1$.

(b) Доведіть, що вказана нерівність обертається на рівність для нескінченої кількості трійок відмінних від 1 раціональних чисел x, y, z таких, що $xyz=1$.

Задача 3. Доведіть, що існує нескінченно багато таких натуральних чисел n, що число n^2+1 має простий дільник, більший за $2n+\sqrt{2n}$.

Час роботи: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Четвер, 17 липня 2008 р.

Задача 4. Знайдіть усі функції $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (тобто функції, що визначені на множині усіх додатних дійсних чисел та приймають додатні значення) такі, що

$$\frac{\big(f(w)\big)^2 + \big(f(x)\big)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для довільних додатних w, x, y, z, які задовольняють рівність $wx = yz$.

Задача 5. Нехай n та k — такі натуральні числа, що $k \geqslant n$, а число $k - n$ парне. Є $2n$ ламп, які занумеровані числами $1, 2, \ldots, 2n$, кожна з яких може знаходитись у одному з двох станів: *увімк.* (увімкнена) або *вимк.* (вимкнена). Спочатку всі лампи були вимнені. Розглядаються впорядковані послідовності *кроків*: на кожному кроці рівно одна лампа змінює свій стан на протилежний (з увімк. на вимк. або з вимк. на увімк.).

Позначимо через N число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n-ту увімкнені, а усі лампи з $(n+1)$-ї по $(2n)$-у вимкнені.

Позначимо через M число таких послідовностей з k кроків, що приводять до стану: усі лампи з 1-ї по n-ту увімкнені, усі лампи з $(n+1)$-ї по $(2n)$-у вимкнені, але при цьому жодна з ламп з $(n+1)$-ї по $(2n)$-у ні разу не змінювала свого стану.

Знайдіть значення відношення N/M.

Задача 6. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, у якому $|BA| \neq |BC|$. Позначимо кола, що вписані в трикутники ABC та ADC, через ω_1 та ω_2 відповідно. Припустимо, що існує коло ω, яке дотикається до продовження відрізка BA за точку A, продовження відрізка BC за точку C, і також дотикається до прямих AD та CD. Доведіть, що спільні зовнішні дотичні до кіл ω_1 та ω_2 перетинаються на колі ω.

Час роботи: 4 години 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів