49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Thứ 4, 16/7/ 2008

Bài 1. Tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Đường tròn đi qua H với tâm tại điểm giữa của BC giao với đường BC tại A_1 và A_2. Tương tự, đường tròn đi qua H với tâm tại điểm giữa của CA giao với đường CA tại B_1 và B_2, đường tròn qua H với tâm tại điểm giữa của AB giao với đường AB tại C_1 và C_2. Chứng minh rằng A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 2. (a) Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

với mọi số thực x, y, z, mỗi số đều khác 1, và thỏa mãn $xyz = 1$.

(b) Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra đối với một số vô hạn bộ ba các số hữu tỷ x, y, z, mỗi số đều khác 1, và thỏa mãn $xyz = 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $n^2 + 1$ có ước nguyên tố lớn hơn $2n+\sqrt{2n}$.

Thời gian: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài 7 điểm

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Thứ 5, 17/7/ 2008

Bài 4. Tìm tất cả các hàm $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (tức là, f là hàm từ tập hợp các số thực dương vào tập hợp các số thực dương) sao cho

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

với mọi số thực dương w, x, y, z mà $wx=yz$.

Bài 5. Giả sử n và k là các số nguyên dương với $k\ge n$ và $k-n$ là số chẵn. Cho $2n$ bóng đèn được đánh số từ 1 đến $2n$; mỗi bóng có thể *sáng* hoặc *tắt*. Tại thời điểm ban đầu, mọi bóng đều *tắt*. Xét các dãy gồm các *bước*: tại mỗi bước, công tắc của một trong các bóng đèn được bật (từ *sáng* chuyển thành *tắt* hoặc từ *tắt* chuyển thành *sáng*).

Giả sử N là số các dãy mà mỗi dãy gồm k bước và kết thúc ở trạng thái: các bóng đèn từ 1 đến n *sáng*, các bóng từ $n+1$ đến $2n$ *tắt*.

Giả sử M là số các dãy mà mỗi dãy gồm k bước và cũng kết thúc ở trạng thái: các bóng đèn từ 1 đến n *sáng*, các bóng từ $n+1$ đến $2n$ *tắt*, nhưng trong quá trình đó không một công tắc nào của các bóng từ $n+1$ đến $2n$ được bật.

Tính tỉ số N/M.

Bài 6. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi với $|BA|\neq|BC|$. Ký hiệu các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và ADC tương ứng qua ω_1 và ω_2. Giả sử tồn tại đường tròn ω tiếp xúc với nửa đường thẳng BA kéo dài tại một điểm đi sau A và tiếp xúc với nửa đường thẳng BC kéo dài tại một điểm đi sau C, đồng thời đường tròn đó cũng tiếp xúc với các đường thẳng AD và CD. Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của ω_1 và ω_2 giao nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ω.

Thời gian: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài 7 điểm